

Egzamin z Algebry I — część praktyczna, 03.02.2025 — szkice rozwiązań

- Czas trwania tej części egzaminu, to 120 minut.
- W trakcie egzaminu nie można korzystać z notatek, urządzeń elektronicznych, itp.
- Rozwiązanie każdego zadania powinno być zapisane na osobnej kartce.
- Każda kartka powinna zawierać: imię i nazwisko, numer albumu i numer grupy ćwiczeniowej.

Zadanie 1. Niech G będzie grupą rzędu 143.

- Uzasadnij, że grupa G zawiera podgrupę normalną H rzędu 11.
- Wykaż, że dla dowolnych elementów $g \in G$ oraz $h \in H$ mamy $ghg^{-1} = h$.
- Wynioskuj, że grupa G jest abelowa.

Rozwiązanie.

(a) Z twierdzenia Sylowa wynika, że gdy n jest liczbą 11-podgrup Sylowa grupy G , to $n \mid 13$ oraz $n \equiv 1 \pmod{11}$. Stąd wniosek, że $n = 1$. Jeśli przez H oznaczamy tę jedyną 11-podgrupę Sylowa w G , to oczywiście $|H| = 11$ oraz $H \triangleleft G$.

(b) Skoro $H \triangleleft G$, to sprzęganie wyznacza morfizm grup $\phi: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ (tzn. $\phi_g(h) = ghg^{-1}$ dla $g \in G$ oraz $h \in H$). Niech K będzie jądrem tego morfizmu. Ponieważ grupa $H \cong C_{11}$ jest abelowa, to $H \leq K$; w szczególności $|G/K|$ jest dzielnikiem liczby $|G/H| = 13$. Z drugiej strony grupa G/K , jako izomorficzna z podgrupą $\text{Aut}(H)$, ma rząd będący dzielnikiem liczby $|\text{Aut}(H)| = \varphi(11) = 10$. Stąd wniosek, że $|G/K| = 1$, czyli $K = G$. To zaś oznacza, że $ghg^{-1} = h$ dla dowolnych $g \in G$ oraz $h \in H$.

(c) Wybierzmy takie $g \in G$ oraz $h \in H$, że $G/H = \langle gH \rangle$ oraz $H = \langle h \rangle$ (wiemy, że obie grupy G/H oraz H są cykliczne). Jeśli $x \in G$, to $xH = (gH)^i = g^iH$ dla pewnego $i \in \mathbb{Z}$. Zatem $x \in g^iH$, czyli $x = g^i h^j$ dla pewnego $j \in \mathbb{Z}$. Stąd wniosek, że $G = \langle g, h \rangle$, a ponieważ $gh = hg$ (patrz punkt (b)), to grupa G jest abelowa. $\square$

Uwaga. Duże prostsze (oraz szybsze) rozwiązanie otrzymujemy korzystając z faktu dowiedzonego na wykładzie (uzyskanego jako prosty wniosek z twierdzenia Sylowa) stwierdzającego, że gdy rząd grupy skończonej jest iloczynem dwóch liczb pierwszych p i q spełniających $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, to grupa ta jest abelowa (a nawet cykliczna).

Zadanie 2. Rozstrzygnij, które z par pierścieni

$$K \times K, \quad K[x]/(x^2), \quad K[x]/(x^2 + 1)$$

są izomorficzne, gdy:

- $K = \mathbb{Q}$.
- $K = \mathbb{C}$.

Rozwiązanie. Oznaczmy te pierścienie przez R_1 , R_2 oraz R_3 .

(a) Gdy $K = \mathbb{Q}$, to żadne dwa z pierścieni R_1, R_2, R_3 nie są ze sobą izomorficzne, gdyż: R_1 nie jest dziedziną, ale jest zredukowany (nie ma niezerowych nilpotentów), R_2 nie jest zredukowany, zaś R_3 jest ciałem izomorficznym z podciałem $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$; ewaluacja $\mathbb{Q}[x] \ni f \mapsto f(i) \in \mathbb{Q}(i)$ jest surjektywnym morfizmem pierścieni o jądrze równym $(x^2 + 1)$.

(b) Gdy $K = \mathbb{C}$, to $R_1 \not\cong R_2$, gdyż pierścień R_1 jest zredukowany, a R_2 — nie. Ponadto $R_1 \cong R_3$; wystarczy zauważyć, że zestawienie ewaluacji $\mathbb{C}[x] \ni f \mapsto (f(i), f(-i)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ jest surjektywnym morfizmem pierścieni o jądrze generowanym przez wielomian $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$. $\square$

Zadanie 3. Niech $R = \mathbb{Z}[i]$.

- Rozłóż 2025 na czynniki pierwsze w pierścieniu R .
- Zbadaj, czy pierścień R/I jest dziedziną, gdy $I = (4 + 2i, 2 + 4i)$.

Rozwiązanie.

(a) Zauważmy najpierw, że $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Pozostaje więc rozłożyć 3 oraz 5 na czynniki pierwsze (lub nierozkładalne; te pojęcia się tu pokrywają, bo R jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu). Nietrudno uzasadnić, że 3 jest elementem nierozkładalnym w R . Istotnie, gdy $3 = (a + ib)(c + id)$ dla pewnych $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, to $9 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Ponieważ 3 nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych, to bez straty ogólności możemy założyć, że $a^2 + b^2 = 1$, a stąd $a + ib \in U(R) = \{\pm 1, \pm i\}$. Natomiast $5 = (2 + i)(2 - i)$ i podobnie jak powyżej łatwo pokazać, że elementy $2 \pm i \in R$ są nierozkładalne. Łącznie $2025 = 3^4 \cdot (2 + i)^2 \cdot (2 - i)^2$ jest rozkładem na elementy pierwsze (nierozkładalne), w dodatku parami niestowarzyszone.

(b) Oczywiście $I \subseteq (2)$. Z drugiej strony $4 = 2(1-i)(1+i) \in I$, gdyż $2(1-i) = (4+2i) - (2+4i) \in I$. W konsekwencji $2 = (2+4i) - 4i \in I$ oraz $(2) \subseteq I$. Łącznie mamy więc $I = (2)$. Ponieważ element $2 = (1+i)(1-i)$ jest rozkładalny, to R/I nie jest dziedziną (a nawet zawiera niezerowy nilpotent, gdyż $1+i \notin I$, ale $(1+i)^2 = 2i \in I$; łatwo też uzasadnić, że $R/I \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$). $\square$

Zadanie 4. Rozstrzygnij czy ideał $I = (f)$ pierścienia wielomianów $R[x]$, generowany przez wielomian $f = 4x^{13} + 14x^2 - 28$, jest pierwszy/maksymalny, gdy:

- (a) $R = \mathbb{Z}$.
- (b) $R = \mathbb{Q}$.

W przypadku gdy I nie jest ideałem maksymalnym, wskaż ideał maksymalny w $R[x]$ zawierający I .

Rozwiązanie.

(a) Ideał I nie jest pierwszy (więc nie jest też maksymalny). Istotnie, $2 \cdot (2x^{13} + 7x^2 - 14) = f \in I$, ale $2 \notin I$ oraz $2x^{13} + 7x^2 - 14 \notin I$. Ponadto, gdy $M = (x, 2)$, to oczywiście $I \subseteq M$ oraz $\mathbb{Z}[x]/M \cong \mathbb{Z}_2$. Zatem M jest poszukiwanym ideałem maksymalnym zawierającym I .

(b) Stosując kryterium Eisensteina dla $p = 2$ (jest to element pierwszy w dziedzinie z jednoznacznością rozkładu $\mathbb{Z}$) stwierdzamy, że wielomian f jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$. Ponieważ w dziedzinie ideałów głównych (a $\mathbb{Q}[x]$ nią jest) każdy element nierozkładalny generuje ideał maksymalny, to I jest w tym przypadku ideałem maksymalnym. $\square$

Zadanie 5. Udowodnij, że pierścień $\mathbb{Z}[i\sqrt{23}]$ nie jest dziedziną ideałów głównych.

Rozwiązanie. Pierścień $\mathbb{Z}[i\sqrt{23}]$ nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu, a więc tym bardziej nie jest dziedziną ideałów głównych (dowodziliśmy na wykładzie, że każda dziedzina ideałów głównych jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu). Istotnie, po pierwsze $2^3 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{23}) \cdot (1 - i\sqrt{23})$. Ponadto nietrudno uzasadnić (standardowy argument wykorzystujący kwadrat modułu liczby zespolonej), że 2, 3 oraz $1 \pm i\sqrt{23}$ są elementami nierozkładalnymi w R . Skoro $U(R) = \{\pm 1\}$, to żadne dwa spośród tych elementów nie są stowarzyszone. $\square$